Istraživanje o konceptu vjerovatnoće

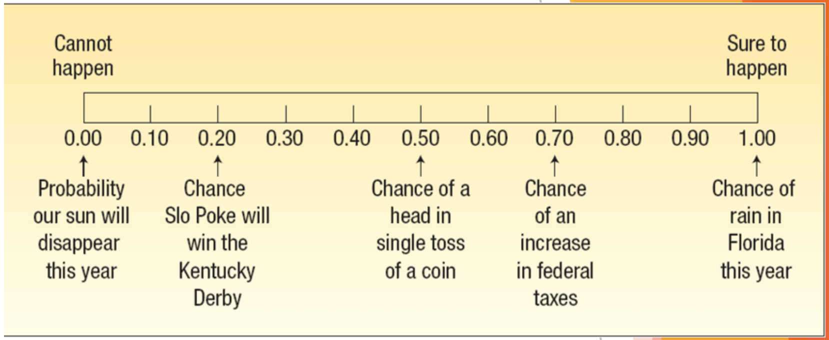
Poglavlje 5

CILJEVI

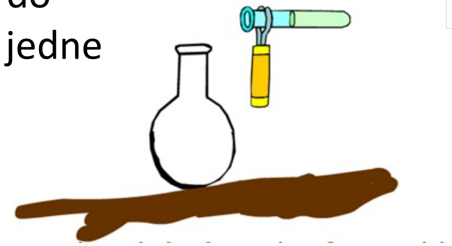
1. Definisati vjerovatnoću
2. Objasniti klasični, empirijski i subjektivni pristup vjerovatnoći.
3. Razumjeti izraze: eksperiment, događaj, ishod, permutacije i kombinacije
4. Objasniti pojmove: uslovna vjerovatnoća i sabiranje vjerovatnoća

Vjerovatnoća, Eksperiment, Ishod, Događaj:

Vjerovatnoća: Mjera vjerodostojnosti da će se neki događaj u budućnosti dogoditi; može uzimati vrijednosti između 0 i 1.



- **Eksperiment**: Posmatranje neke aktivnosti.Proces koji vodi do pojavljivanja jedne i samo jedne od nekoliko mogućih opservacija.
- **Ishod**: Rezultat nekog eksperimenta.
- **Događaj**: Kolekcija jednog ili više ishoda nekog eksperimenta.



Eksperiment: Bacanje kocke.

Mogući ishodi: Brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6

Jedan mogući događaj: Pojavljivanje parnog broja. Mogući ishodi su: 2, 4, i 6.

Međusobno isključivi događaji i nezavisni događaji

- Međusobno isključivi događaji : Pojavljivanje bilo kojeg događaja znači da se nijedan drugi u isto vrijeme ne može desiti.
- Događaji su nezavisni ako ostvarenje jednog događaja ne utiče na ostvarenje drugog.

Međusobno isključivi: Ostvarenje 2 isključuje ostvarenje 1, 3, 4, 5, 6 pri istom bacanju.

Nezavisnost: Ostvarenje 2 pri prvom bacanju ne utiče na vjerovatnoću ostvarenja 3 pri sljedećem bacanju.

Uključivanje svih godađaja znači: Najmanje jedan događaj se mora pojaviti prilikom sprovođenja eksperimenta.

PRIMJER - Bacanje 2 novčića istovremeno

Razmotrimo eksperiment o bacanju dva novčića istovremeno.
Mogući ishodi su: {GG, GP, PG, PP}
Vjerovatnoća ishoda jedne glave.
Vjerovatnoća jedne glave je = 2/4 = 1/2

Zaključci:

- Četiri moguća ishoda su međusobom isključiva.
- Četiri moguća ishoda uključena. Tj. Vjerovatnoća ukupna je = 1 (.25 + .25 + .25 + .25).

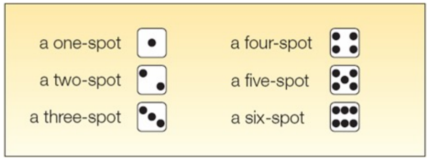
Klasična i empirijska vjerovatnoća

$$\text{Vjer.nekogdogađaja} = \frac{\text{BrojPovoljnihIshoda}}{\text{UkupanBrojMogućogućbda}}$$

Klasična Vjerovatnoća bazirana na pretpostavci da su vjerovatnoće ostvarenja ishoda jednog eksperiment približno jednake.

Razmotrimo eksperiment bacanja kockice koja ima 6 strana. Koja je vjerovatnoća da ćemo dobiti parni broj tako da je kockica okrenuta prema gore?

Mogućnosti su sljedeće:



Postoje tri preferirana ishoda (2, 4 i 6) u kolekciji od 6 jednako mogućih ishoda.

Koncept relativnih frekvencija:

Vjerovatnoća jednog događaja koji se dešava na dugi rok određen je posmatranjem šta se desilo u prethodnim periodima:

$$\text{Vjerovatnoća događaja} = \frac{\text{Broj koliko se puta desio u prošlosti}}{\text{Ukupan broj opservacija}}$$

Empirijska vjerovatnoća se koristi kada se broj puta ostvarenja događaja podijeli brojem opservacija. Ključ za uspostavljanje ove empirijske vjerovatnoće je zaključak da što više observacija obezbedimo, to ce veća vrijednost biti.

PRIMJER:

01. februara 2019. godine, eksplodirao je Space Shuttle Columbia. Ovo je bila druga katastrofa u nizu od 113 misija koje je sprovela NASA. Na osnovu ove informacije, koja je vjerovatnoća da će sledeće misije biti uspješno završene?

$$\text{Vjerovatnoća uspješnosti leta} = \frac{\text{Broj uspješnih letova}}{\text{Ukupan broj letova}} = \frac{111}{113} = 0.98$$

Subjektivna vjerovatnoća -Primjer

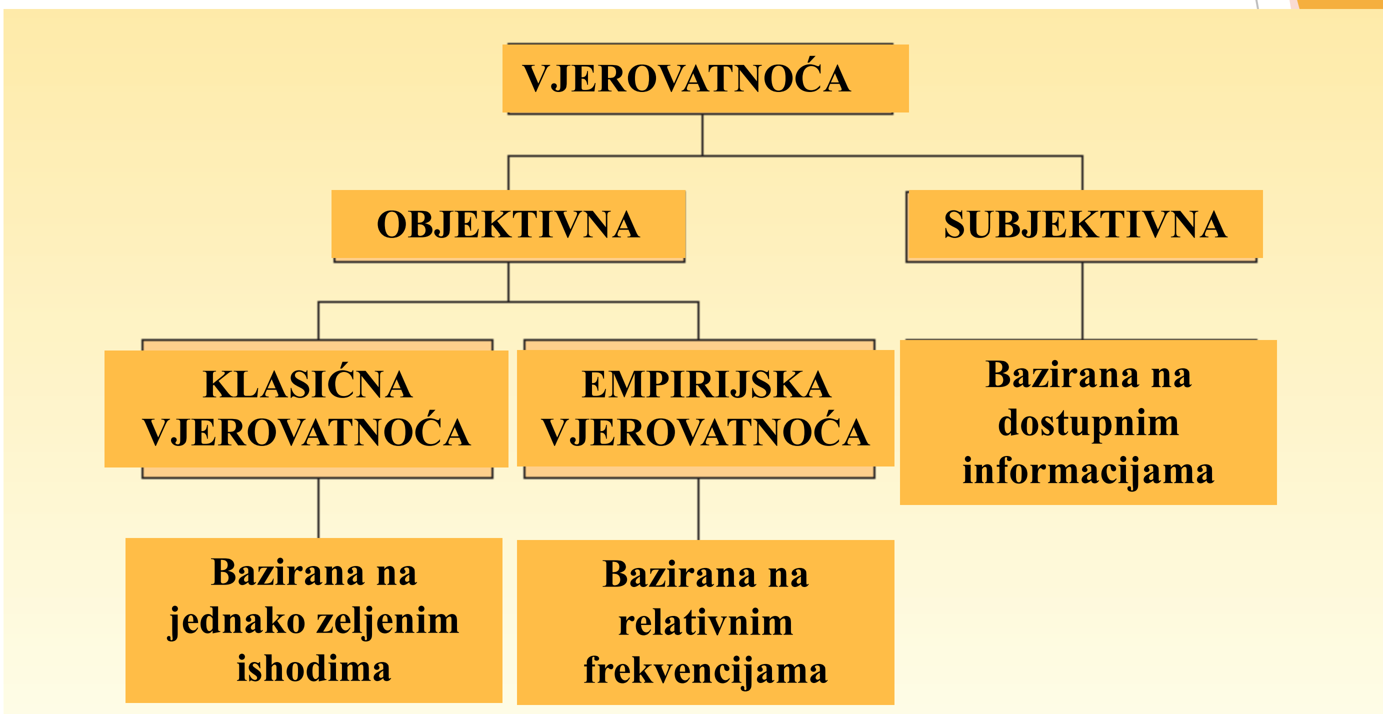
Subjektivna vjerovatnoća je bazirana na informacijama koje su dostupne.

- Ukoliko postoji malo ili ne postoji prošlo iskustvo ili informacija na osnovu koje se zasniva vjerovatnoća, o njoj možemo subjektivno da zaključimo.

- Primjeri subjektivnih vjerovatnoća su sljedeće:

  1. Procjena vjerovatnoće da će rukometašice Budućnosti po treći put osvojiti LŠ u naredne 2 godine.
  2. Procjena vjerovatnoće da ćete se vjenčati prije 21. godine.
  3. Procjena vjerovatnoće da će se budžetski deficit Crne Gore smanjiti za polovinu u narednih 10 godina.
  4. Ocjena vjerovatnoće da će zemljotres pogoditi Los Angeles ove godine.

Sažetak o vrstama vjerovatnoće



Primjer

Primjer: Tokom njene karijere profesorica Mikroekonomije je dala 186 desetki od 1200 studenata koje je ispitivala. Kolika je vjerovatnoća da će student u sljedećem semestru imati desetku?

Ovo je primjer empirijske vjerovatnoće.
Vjerovatnoća da neko iz ove generacije imati 10 je:

$$\boxed{P(A)=\frac{186}{1200}=0.155}$$

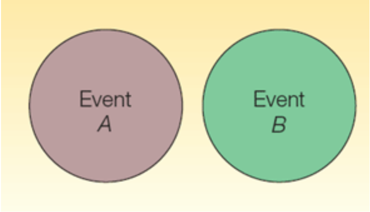
Osnovna pravila teorije vjerovatnoća

- ***Pravilo dodatka*** - Ako su događaji međusobno isključivi, onda pojavljivanje bilo kojeg događaja isključuje pojavljivanje bilo kojeg drugog događaja. Ako imamo dva događaja A i B i ako su oni međusobmo isključivi, onda gore navedeno pravilo podrazumijeva da vjerovatnoća od A ili B je data izrazom:

  P(A or B) = P(A) + P(B)

- ***Opšte pravilo sabiranja:*** Ako su A i B dva događaja koja nijesu međusobno isključiva, onda je P(A ili B) data formulom:

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B)$$



PRIMJER:

Automatska mašina koristi se za punjenje plastičnih pakovanja različitim povrćem: pasuljem, brokolijem i drugim povrćem. Većina pakovanja sarži tačnu težinu, međutim zbog varijacija u veličini pasulja ili nekog drugog povrća, pakovanje može da teži više ili manje nego što treba. Provjera 4000 popunjenih pakovanja u prošlom mjesecu otkrila je sljedeće:

Weight	Event	Number of Packages	Probability of Occurrence	
Underweight	*A*	100	.025	← $\frac{100}{4,000}$
Satisfactory	*B*	3,600	.900	
Overweight	*C*	300	.075	
		4,000	1.000	

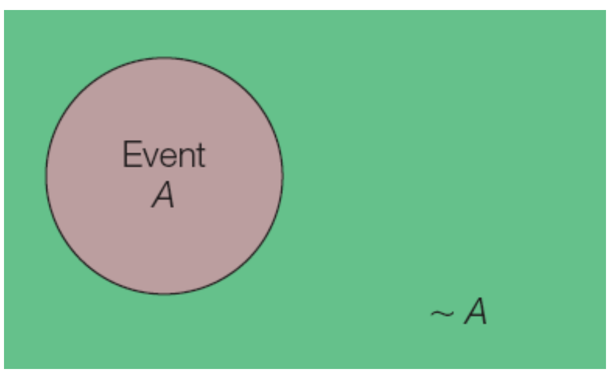
Koja je vjerovanoća da će pojedinačno pakovanje da bude ili teže ili lakše nego što treba biti?

P(A or C) = P(A) + P(C) = .025 + .075 = .10

Pravilo komplementarnosti (suprotna vjerovatnoća)

Pravilo komplementarnosti se koristi da odredimo da je vjerovatnoća jednog događaja jednaka razlici 1 i vjerovatnoće događaja koji se neće javiti . Akoje P(A) vjerovatnoća događaja A i P(~A) vjerovatnoća suprotnog od A,

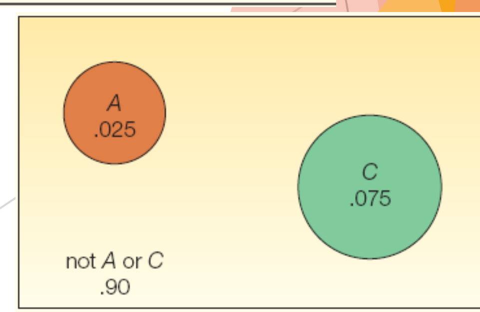
$P(A) + P(\sim A) = 1$ or $P(A) = 1 - P(\sim A)$.



PRIMJER: Automatska mašina koristi se za punjenje plastičnih pakovanja različitim povrćem: pasuljem, brokolijem i drugim povrćem. Većina pakovanja sarži tačnu težinu, međutim zbog varijacija u veličini pasulja ili nekog drugog povrća, pakovanje može da teži više ili manje nego što treba. Provjera 4000 popunjenih pakovanja u prošlom mjesecu otrila je podatke iz tabele ispod. Koristeći pravilo komplementarnosti, pokazati vjerovatnoću da zadovoljavajući paket bude 0,900.

Weight	Event	Number of Packages	Probability of Occurrence
Underweight	*A*	100	.025
Satisfactory	*B*	3,600	.900
Overweight	*C*	300	.075
		4,000	1.000

$$
\begin{aligned}
P(B) &= 1 - P(\sim B) \\
&= 1 - P(A \text{ or } C) \\
&= 1 - [P(A) + P(C)] \\
&= 1 - [.025 + .075] \\
&= 1 - .10 \\
&= .90
\end{aligned}
$$



Dodatni primjeri pređenog gradiva

Primjer: Jedna avio kompanija ima udružene letove na liniji Boston - New York. Dobili smo sljedeće informacije za proteklu godinu dana:

Dolazak	Frekvencija
Prerano	100
Na vrijeme	800
Kašnjenje	75
Otkazan	25
Ukupno	1000

1. Ako je A dogadjaj da avion stigne prije vremena, onda je $P(A) = 100/1000 = .10$.

2. Ako je B događaj da avion kasni onda je $P(B) = 75/1000 = .075$.

3. Vjerovatnoća da avion kasni ili je stigao prerano je $P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B) = .1 + .075 = .175$.

Nastavak 1. primjera

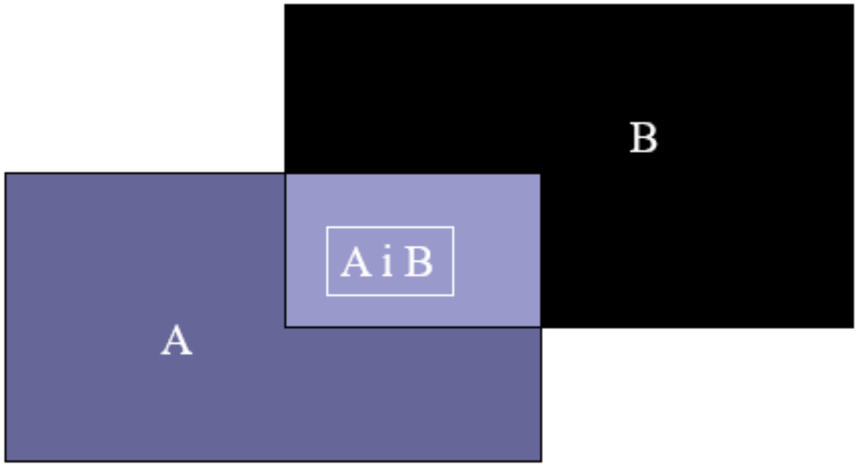
Koristeći pravilo komplementarnosti, naći vjerovatnoću da je avion ranio ili kasnio.

Ako je C događaj da avion stiže na vrijeme onda je njegova vjerovatnoća P(C) = 800/1000 = .8.

Ako je D događaj da je let otkazan onda je njegova vjerovatnoća P(D) = 25/1000 = .025.

$$P(A \text{ ili } B) = 1 - P(C \text{ ili } D)$$
$$= 1 - [.8 + .025]$$
$$= .175$$

PRAVILA PRIKAZANA VENOVIM DIJAGRAMOM



Pravilo komplementarnosti

Opšte pravilo sabiranja

Udružena vjerovatnoća

Udružena vjerovatnoća je vjerovatnoća koja mjeri vjerodostojnost da dva ili više događaja će se desiti istovremeno.

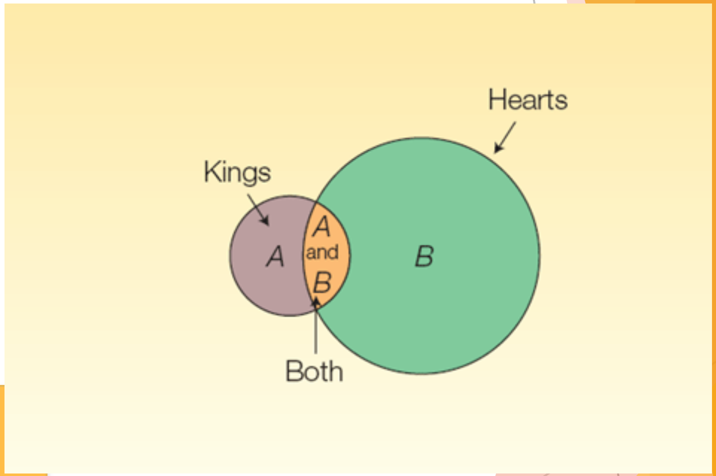
Jedan PRIMJER može biti događaj da student ima i telefon i MP3.

Primjer3:Opšte pravilo sabiranja i udružena vjerovatnoća

GENERAL RULE OF ADDITION $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$ **[5–4]**

PRIMJER: Rezultat istraživanja na uzorku od 200 turista koji su posjetili Budvu tokom 2018. godine. Istraživanje je pokazalo je 120 turista bilo na plaži Mogren, dok je 100 bilo na plaži Stefan Braun, a 60 turista je bilo na obije plaže.Pitanje: Koja je vjerovatnoća da je neko od njih posjetio Mogren ili Stefan Braun?

Udružena vjerovatnoća: Vjerovatnoća da će se dva ili više događaja desiti istovremeno.



P(Mogren ili St Braun) = P(Mogren) + P(St Braun) - P(obije plaže, Mogren i Stefan Braun)

= 120/200 + 100/200 – 60/200

= .60 + .50 – .30=0.8

Specijalno i opšte pravilo množenja

- Specijalno pravilo množenja zahtijeva da dva događaja A i B budu nezavisni.
- Dva događaja A i B su nezavisni ako pojavljivanje jednog nema uticaja na vjerovatnoću pojavljivanja drugog.
- Specijalno pravilo je: *P(A i B) =P(A)*P(B).*

PRIMJER

Istraživanje koje je sprovela Američka automobilska asocijacija (AAA) otkrilo je da je 60% njenih članova imalo rezervacije avionskih karata prošle godine. Dva člana su izabrana slučajnim uzorkom. Kako je broj AAA članova veoma velik, možemo da pretpostavimo da su članovi R1 i R2 nezavisni. Koja je vjerovatnoća da su oba člana imali rezervisane avionske karte prošle godine?

Rešenje:

Vjerovatnoća da je prvi član imao rezervisanu kartu prošle godine je 0,60, zapisano je kao $P(R_1) = .60$

Vjerovatnoća da je drugi član imao rezervisanu kartu prošle godine je takođe 0,60, zapisano je kao $P(R_2) = .60$

Kako je broj članova AAA veoma veliki vjerovano ćete pretpostaviti da su R1 i R2 nezavisni.

$P(R_1 \text{ and } R_2) = P(R_1)P(R_2) = (.60)(.60) = .36$

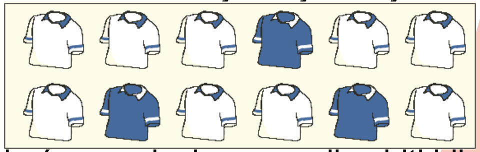
Opšte pravilo množenja se koristi da bi se pronašla zajednička vjerovatnoća ostvarenja dva nezavisna događaja.

GENERAL RULE OF MULTIPLICATION $P(A \text{ and } B) = P(A)P(B|A)$

PRIMJER

Fudbaler ima 12 majica u ormaru. Pretpostavimo da je 9 bijele, a ostale plave boje. On se oblači u mraku, tako da samo uzme majicu iz ormara ne gledajuči koju uzima, već je samo obuče. On igra fudbal 2 dana zaredom i ne pere veš.

Koja je vjerovatnoća da će obije majice koje izabere biti bijele boje?



Vjerovatnoća da će prva izabrana majica biti bijele boje označićemo sa W_1. Vjerovatnoća je $P(W_1) = 9/12$

Sa W_2 ćemo označi drugu izabranu majicu bijele boje. Uslovna vjerovatnoća da je i druga majica bijele boje, tako da je i prva izabrana majica takođe bijele boje data je u nastavku:

$P(W_2 | W_1) = 8/11$.

Kako bismo odredili vjerovatnoću 2 bijele majice koje smo izabrali koristimo sljedeću formulu: *P(AB) = P(A) P(B|A)*

$P(W_1 \text{ and } W_2) = P(W_1)P(W_2|W_1) = (9/12)(8/11) = 0.55$

USLOVNA I UDRUŽENA VJEROVATNOĆA

Uslovna Vjerovatnoća je vjerovatnoća ostvarivanja jednog događaja, pod uslovom da se desio drugi događaj.

- Vjerovatnoća događaja A kada se događaj B već desio označava se sa P(A|B).

Udružena vjerovatnoća, $P(A \text{ i } B)$, data je sljedećom formulom:

$$P(A \text{ i } B) = P(A)P(B/A)$$

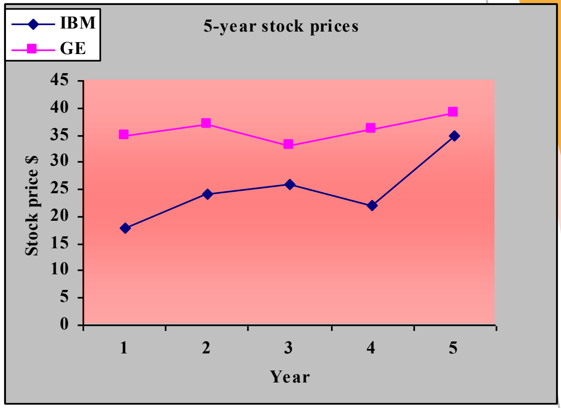
ili

$$P(A \text{ i } B) = P(B)P(A/B)$$

Opšte pravilo množenja (dodatak): Ono kaže da za dva događaja, A i B, udružena vjerovatnoća da će se oba događaja desiti, dobija se množenjem vjerovatnoće da će se ostvariti događaj A i uslovne vjerovatnoće od B pod uslovom da je događaj A već ostvaren.

Primjeri:

1. Marko posjeduje dvije vrste akcija koje djeluju nezavisno. Vjerovatnoća da će akcija A rasti u sljedećoj godini je .5. Vjerovatnoća da će vrijednost akcije B u sljedećoj godini je .7. Kolika je vjerovatnoća da će rasti vrijednost i jedne i druge sljedeće godine?



P(A i B) = (.5)(.7) = .35

Pitanje: Kolika je vjerovatnoća da će najmanje jedna akcija rasti u vrijednosti sljedeće godine? →

P(najmanje jedna) = (.5)(.3) + (.5)(.7) + (.7)(.5) = .85.